Atelier équations

Exemples d'activités classe

Stage PAF lycée mai 2019

Martine BOSC
Jean-Louis MALTRET

irem Aix-Marseille

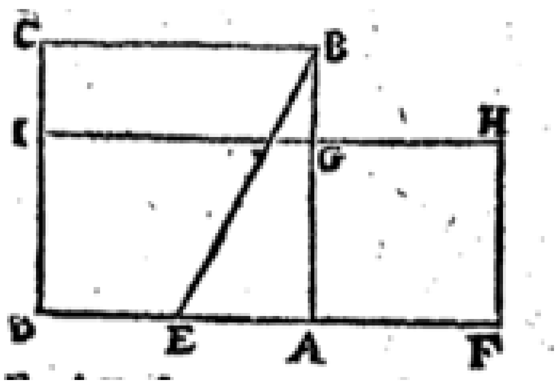
La technique géométrique des grecs

Un exemple du second degré :

Euclide Livre II proposition 11

Coupper vne ligne droicte donnee, tellement que le rectan-
gle de la toute, & de l'vne des parties, ſoit egal au quar-
ré de l'autre partie.

Traduction Henrion 1632



Partager un segment en extrême et moyenne raison :
Soit a la longueur du segment à partager et x la longueur de la plus grande des 2 parties ($x \neq 0; x \neq a$), on doit avoir :

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x} \Leftrightarrow x^2 + ax = a^2$$

irem
Aix-Marseille

Les équations du second degré dans *Les Arithmétiques* de Diophante

Les mots sont remplacés par des symboles

L'arithme x	ζ,
x^2	Δ^Y
x^3	K^Y

« 4 carrés joints à trois nombres font 10 »	$4x^2 + 3x = 10$	$\Delta^Y\delta\ \zeta\gamma\ \varepsilon\sigma\tau\iota\ \iota$

Pour le second degré,

- il ne donne pas de règle de résolution de l'équation complète,

- il ne décrit pas la méthode qui lui a permis la résolution.

irem Aix-Marseille

Les équations du second degré dans *Les Arithmétiques* de Diophante

Proposition I.27 : « *Trouver deux nombres tels que leur somme et leur produit forment des nombres donnés* ».

Proposition I.28 : « *Trouver deux nombres tels que leur somme et la somme de leurs carrés forment des nombres donnés* ».

Proposition I.30 : « *Trouver deux nombres tels que leur différence et leur produit forment des nombres donnés* ». [Ver Eecke, 1926, pp. 36-40].

irem Aix-Marseille

Proposition I.27 « Trouver 2 nombres tels que leur somme et leur produit forment des nombres donnés »

Énoncé général

Il faut toutes fois que le carré de la demi-somme des nombres excède d'un carré le produit de ces nombres

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 > xy + a^2$$

Condition d'existence des solutions

Proposons que la somme des nombres soit 20 et leur produit 96

Proposition d'un un cas particulier

Proposons donc que la somme des nombres forme 20 unités et que leur produit forme 96 unités.

Que l'excédent des nombres soit 2 arithmes. Dès lors, puisque la somme des nombres est 20 unités, si nous la divisons en deux parties égales, chacune des parties sera la moitié de la somme, ou 10 unités. Donc, si nous ajoutons à l'une des parties, et si nous retranchons de l'autre partie, la moitié de l'excédent des nombres, c'est-à-dire 1 arithme, il s'établit de nouveau que la somme des nombres est 20 unités et que leur excédent est 2 arithmes. En conséquence, posons que le plus grand nombre est 1 arithme augmenté des 10 unités qui sont la moitié de la somme des nombres ; donc le plus petit sera 10 unités moins 1 arithme, et il s'établit que la somme des nombres est 20 unités et que leur excédent est 2 arithmes.

Il faut aussi que le produit des nombres forme 96 unités. Or leur produit est cent unités moins 1 carré d'arithme ; ce que nous égalons à 96 unités, et l'arithme devient 2 unités. En conséquence, le plus grand nombre sera 12 unités, le plus petit sera 8 unités, et ces nombres satisfont à la proposition » [Ver Eecke, 1926, pp. 36-38].

Résolution du un cas particulier

Source : Repères IREM n°53

Aix-Marseille

Les équations de degré 1 et 2 par Al Kwarismi (780 – 850)

« Kitâb al-jabr wa al-muqâbala »
« 0uvrage sur le calcul de gabr et de muqabala »

« ***al gabr*** » : addition aux deux membres de l’équation des termes égaux à ceux qui sont affectés du signe moins, de façon à n’avoir plus que des termes positifs.

« ***muqabala*** » : réduction des termes semblables.

«***hatt*** » : division de chaque terme par un même nombre »

irem
Aix-Marseille

3 sortes de nombres :

les nombres simples, les racines (ou choses) et les carrés.

dirham *gezr* *chay* *mahal*

xay *cosa* (XVIe siècle)

x (XVIIe siècle)

Tous les textes sont écrits avec des mots et sans aucun symbolisme

– les carrés sont égaux aux racines, $ax^2 = bx$,
– les carrés sont égaux à un nombre, $ax^2 = c$,
– les racines sont égales à un nombre, $bx = c$,
– les carrés et les racines sont égaux à un nombre, $ax^2 + bx = c$,
– les carrés et les nombres sont égaux aux racines, $ax^2 + c = bx$,
– les racines et les nombres sont égaux aux carrés, $bx + c = ax^2$.

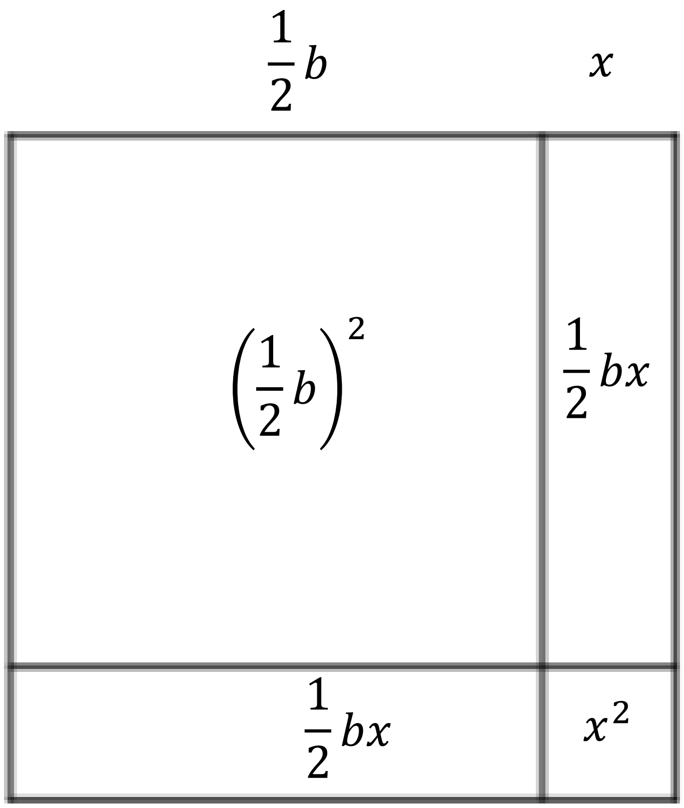
Les résolutions sont géométriques, à la manière des grecs

Les résolutions sont justifiées géométriquement, à la manière des grecs

Exemple pour l'équation $x^2 + bx = c$

Technique de la complétion du carré

$$\left(x + \frac{1}{2}b\right)^2 = c + \left(\frac{1}{2}b\right)^2$$



irem Aix-Marseille

L’équerre d’Al-Khwarismi (783-850)

Aix-Marseille

La technique graphique de Ménechme

Un exemple de degré 3 : Le problème de Délos

bulletin Inter-IREM Épistémologie : traduction littérale et texte grec

Ménechme.

[So]it A et E les deux segments de droite donnés ; il faut [trou]ver deux moyennes proportionnelles entre A et E.

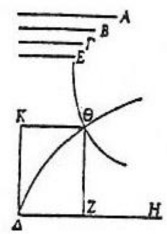


Fig. 31.

Supposons le problème résolu, et soit B et Γ (sc. les moyennes proportionnelles cherchées) ; soit ΔH une demi-droite, issue de Δ, donnée par sa position ; portons sur elle à partir de Δ le segment ΔZ égal à Γ, élevons la perpendiculaire en Z et portons sur elle ZΘ égal au segment B. Du moment donc que les trois segments A, B et Γ sont proportionnels, le rectangle de côtés A et Γ est équivalent au carré sur B, d'où il suit que le rectangle ayant pour côtés les segments donnés A et Γ, c'est-à-dire A et ΔZ, est équivalent au carré sur B, c'est-à-dire au carré sur ZΘ. Le point Θ est donc situé sur une parabole[1] passant par le point Δ. Menons les parallèles ΘK et ΔK. Comme le rectangle de côtés B et Γ est donné, étant égal au rectangle de côtés A et E, le rectangle de côtés KΘ et ΘZ est à son tour donné. Le point Θ est donc situé sur une hyperbole[2] d'asymptotes KΔ et ΔZ. Il s'ensuit que le point Θ et, partant, aussi le point Z, est donné.

Le problème sera dès lors composé de la manière que voici. Soit A et E les segments de droite donnés, ΔH la demi-droite issue de Δ ; faisons passer par Δ une parabole ayant pour axe ΔH et pour paramètre A ; que les

Ὡς Μέναιχμος.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι αἱ A, E· δεῖ δὴ τῶν A, E δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν.

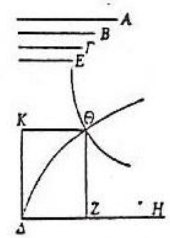


Fig. 31.

Γεγονέτω, καὶ ἔστωσαν αἱ B, Γ, καὶ ἐκκείσθω θέσει εὐθεῖα ἡ ΔH πεπερασμένη κατὰ τὸ Δ, καὶ πρὸς τῷ Δ τῇ Γ ἴση κείσθω ἡ ΔZ, καὶ ἤχθω πρὸς ὀρθὰς ἡ ZΘ, καὶ τῇ B ἴση κείσθω ἡ ZΘ. Ἐπεὶ οὖν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ A, B, Γ, τὸ ὑπὸ τῶν A, Γ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς B· τὸ ἄρα ὑπὸ δοθείσης τῆς A καὶ τῆς Γ, τουτέστι τῆς ΔZ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς B, τουτέστι τῷ ἀπὸ τῆς ZΘ. Ἐπὶ παραβολῆς ἄρα τὸ Θ διὰ τοῦ Δ γεγραμμένης. Ἤχθωσαν παράλληλοι αἱ ΘK, ΔK. Καὶ ἐπεὶ δοθὲν τὸ ὑπὸ B, Γ, ἴσον γάρ ἐστι τῷ ὑπὸ A, E, δοθὲν ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ KΘZ. Ἐπὶ ὑπερβολῆς ἄρα τὸ Θ ἐν ἀσυμπτώτοις ταῖς KΔ, ΔZ. Δοθὲν ἄρα τὸ Θ· ὥστε καὶ τὸ Z.

Συντεθήσεται δὴ οὕτως. Ἔστωσαν αἱ μὲν δοθεῖσαι εὐθεῖαι αἱ A, E, ἡ δὲ τῇ θέσει ἡ ΔH πεπαρασμένη κατὰ τὸ Δ, καὶ γεγράφθω διὰ τοῦ Δ παραβολή, ἧς ἄξων μὲν ἡ ΔH, ὀρθία δὲ τοῦ εἴδους πλευρὰ ἡ A, αἱ δὲ καταγόμεναι ἐπὶ τὴν ΔH ἐν ὀρθῇ γωνίᾳ δυνάσθωσαν τὰ παρὰ τὴν A παρακείμενα χωρία πλάτη ἔχοντα τὰς ἀπολαμβανομένας

Aix-Marseille

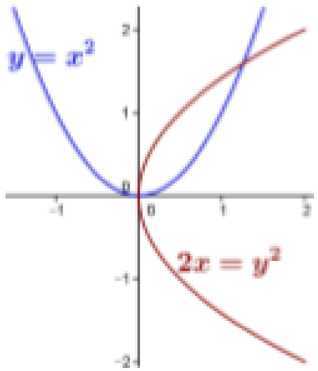
La technique graphique de Ménechme

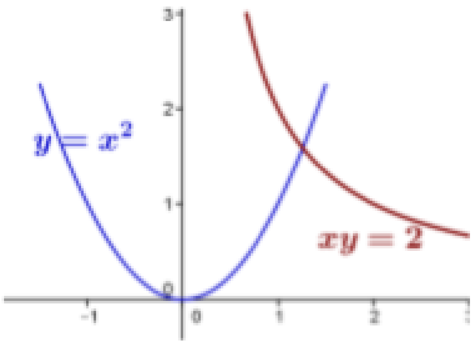
Un exemple de degré 3 : Le problème de Délos

Il résout le problème en s'intéressant au problème de l'insertion de 2 moyennes proportionnelles entre 2 nombres a et b :

Trouver 2 nombres x et y tels que $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$

dont il déduit l'équation $x^3 = a^2 b$





Aix-Marseille

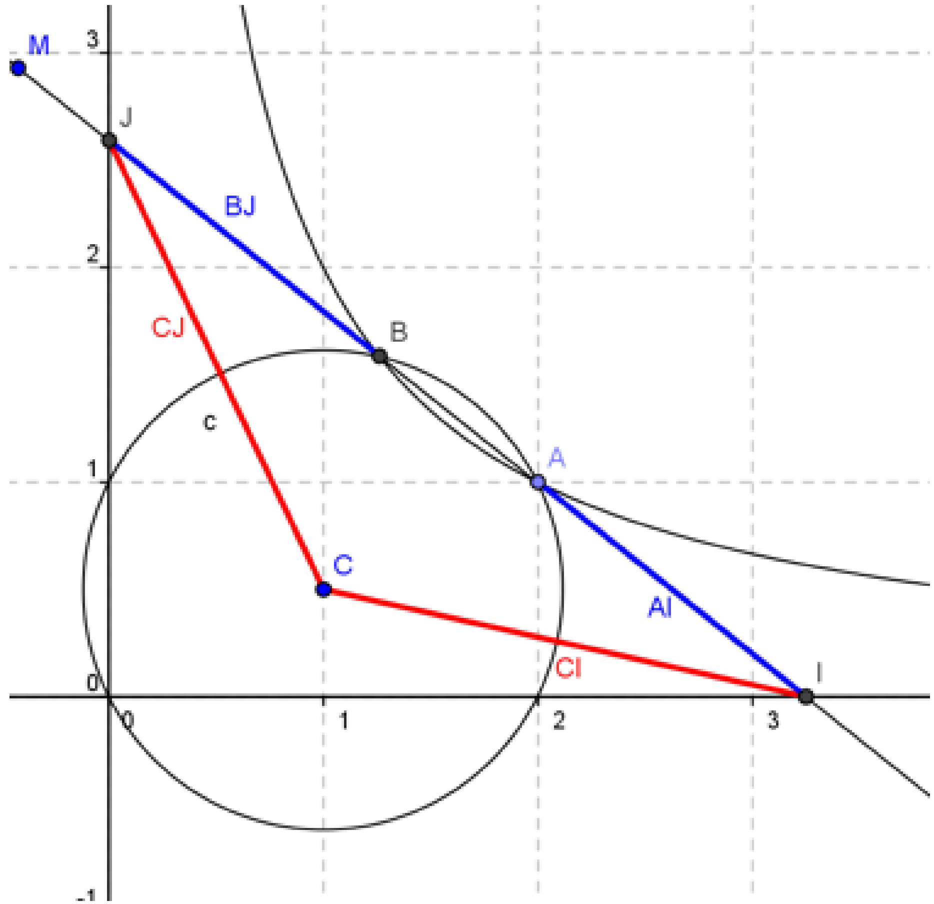
Apollonius reprend les travaux de Ménechme

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$$

dont il déduit $\begin{cases} x^2 = ay \\ y^2 = bx \\ xy = ab \end{cases}$

puis $\begin{cases} x^2 + y^2 = bx + ay \\ xy = ab \end{cases}$

Philon : AI = BJ
Héron : CI = CJ

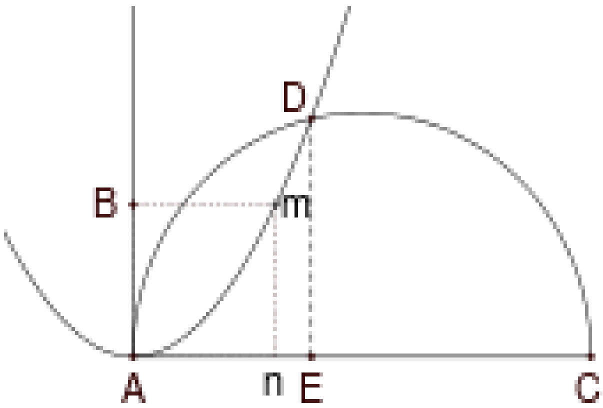


Aix-Marseille

Al Khayam (1048 – 1131)

Une méthode graphique de résolution des équations de degré 3

L’exemple de l’équation $x^3 + bx = c$



$AB^2 = b$, $AC \times AB^2 = c$, ABmn est un carré. Le demi-cercle de diamètre [AC] rencontre la parabole, de sommet A, d'axe (AB) perpendiculaire à (AC) et passant par m, en D.

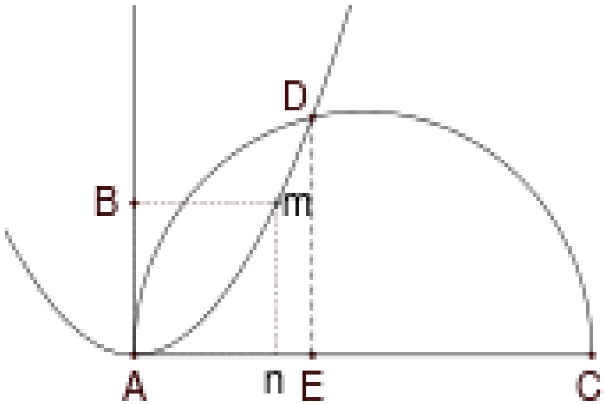
Le point D se projette orthogonalement sur [AC] en E. La distance AE est solution de l'équation.

- **Est-ce vrai ?**
- **Comment a-t il trouvé les coniques ?**

irem Aix-Marseille

Une méthode graphique de résolution des équations de degré 3

L'exemple de l'équation $x^3 + bx = c$



- **Est-ce vrai ?**

(P) : $y = \frac{1}{\sqrt{b}}x^2$ **et (C) :** $x^2 + y^2 - \frac{c}{b}x = 0$

Comment a-t il trouvé les coniques ?

L'exemple de l'équation $x^3 + bx = c$

1. L'équation est transformée en égalité de rapports $\frac{M_1}{M_2} = \frac{N_1}{N_2}$	$\left(\frac{\sqrt{b}}{x}\right)^2 = \frac{x}{\frac{c}{b} - x}$
2. Intervention d'une inconnue auxiliaire : y, moyenne proportionnelle entre N_1 et N_2	$\frac{x}{y} = \frac{y}{\frac{c}{b} - x}$
3. Obtention d'une double égalité (E)	(E) : $\frac{\sqrt{b}}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{\frac{c}{b} - x}$
4. Trois choix possibles pour les coniques	Parabole : $y = \frac{1}{\sqrt{b}} x^2$ Cercle : $x^2 + y^2 - \frac{c}{b} x = 0$ Hyperbole : $y = \frac{\frac{c}{\sqrt{b}} - x}{x}$